模块三 空间向量及其应用

第 1 节 空间向量的基本运算（★☆）

强化训练

1．（2023•四川乐山模拟•★）在四面体 $ABCD$ 中，E，F 分别为 BC，AD 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{EF}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$　（B）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$　（C）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$　（D）$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

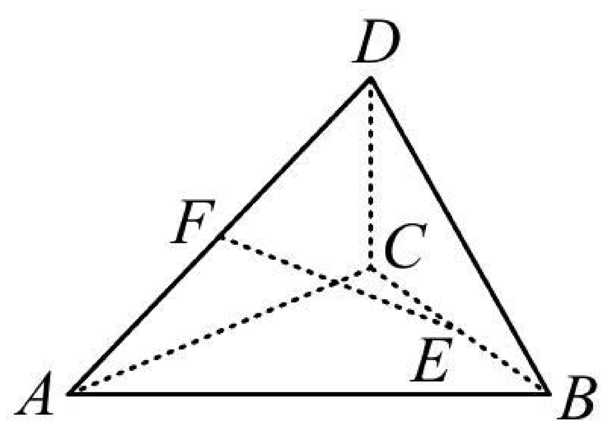
答案：A

解析：空间基底表示和平面基底表示方法类似，往与基向量关联较强的向量上化即可，

如图，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$．



2．（2023•四川成都模拟•★）已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(2,x,6)$，若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $x=$（　　）

（A）0　（B）-4　（C）4　（D）2

答案：B

解析：空间中向量共线与平面上向量共线类似，只需两个向量成倍数关系即可，

因为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，且显然 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，所以存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，故 $\begin{cases}2=-\lambda\\x=2\lambda\\6=-3\lambda\end{cases}$，解得：$x=-4$．

3．（2023•河南模拟•★★）已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____；向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量是_____．

答案：6；$(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$

解析：由题意，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-1)\times(-2)+2\times1=6$；

向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量是 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}=\dfrac{6}{2^2+(-1)^2+2^2}(2,-1,2)=(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3})$.

4.（2023·广东信宜模拟·★★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,4,-2)$，$\boldsymbol{c}=(1,5,x)$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，则实数 $x=$（　　）

（A）3　（B）2　（C）15　（D）5

答案：D

解析：注意到 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面等价于 $\boldsymbol{c}$ 能用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示，可由此建立方程组求 x，

由题意，存在实数 λ 和 μ，使 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，即 $(1,5,x)=\lambda(1,-1,3)+\mu(-1,4,-2)=(\lambda-\mu,-\lambda+4\mu,3\lambda-2\mu)$，

所以 $\begin{cases}\lambda-\mu=1\\-\lambda+4\mu=5\\3\lambda-2\mu=x\end{cases}$，解得：$x=5$.

5.（2023·四川绵阳模拟·★★）已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一组基底，则下列各项中能构成基底的一组向量是（　　）

（A）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　（B）$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　（C）$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　（D）$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

答案：C

解析：要判断三个向量是否构成基底，就看它们是否不共面. 观察发现选项中 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不共线，故通过判断能否用它们表示另一向量来看它们是否共面，

A 项，$\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面，不能构成基底，故 A 项错误；

B 项，$\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面，不能构成基底，故 B 项错误；

C 项，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 都没有 $\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{c}$ 不能用它们表示，故 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不共面，能构成基底，故 C 项正确；

D 项，假设 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(x+y)\boldsymbol{a}+(x-y)\boldsymbol{b}$，所以 $\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases}$，解得：$x=\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$，

从而 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 能用 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 表示，它们共面，故 D 项错误.

6.（2023·广东饶平模拟·★★）（多选）已知空间中三点 $A(0,1,0)$，$B(2,2,0)$，$C(-1,3,1)$，则下列说法正确的是（　　）

（A）$AB\perp AC$

（B）与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 $(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5},0)$

（C）$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角余弦值是 $\dfrac{\sqrt{55}}{11}$

（D）平面 ABC 的一个法向量是 $(1,-2,5)$

答案：ABD

解析：A 项，$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-1)+1\times2+0\times1=0\Rightarrow AB\perp AC$，故 A 项正确；

B 项，与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{AB}=(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5},0)$，故 B 项正确；

C 项，$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$，所以 $\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}>=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{2\times(-3)+1\times1+0\times1}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}}=-\dfrac{\sqrt{55}}{11}$，故 C 项错误；

D 项，设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+2y+z=0\end{cases}$，令 $x=1$ 可得 $\begin{cases}y=-2\\z=5\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,5)$ 是平面 ABC 的一个法向量，故 D 项正确.